2024年全国高考数学试卷压轴题

新课标Ⅰ卷

一、单项选择题

8．已知函数$f(x)$的定义域为R，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当$x<3$时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是(　　)

A．$f(10)>100$　　B．$f(20)>1000$　　C．$f(10)<1000$　　D．$f(20)<10000$

二、多项选择题

11．造型X)可以看作图中的曲线C的一部分，已知C过坐标原点O，且C上的点满足横坐标大于-2，到点$F(2，0)$的距离与到定直线$x=a(a<0)$的距离之积为4，则(　　)

A．$a=-2$　　B．点$(2\sqrt{2}，0)$在C上

C．C在第一象限的点的纵坐标的最大值为1　　D．当点$(x_0，y_0)$在C上时，$y_0\leqslant\frac{4}{x_0+2}$

三、填空题

14．甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字2，4，6，8．两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得1分，数字小的人得0分，然后各自弃置此轮所选的卡片(弃置的卡片在此后的轮次中不能使用)．则四轮比赛后，甲的总得分不小于2的概率为______．

四、解答题

18．

已知函数$f(x)=ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$．

（ⅰ）若$b=0$，且$f'(x)\geqslant0$，求a的最小值；

（ⅱ）证明：曲线$y=f(x)$是中心对称图形；

（ⅲ）若$f(x)>-2$当且仅当$1<x<2$，求b的取值范围．

19．

设m为正整数，数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}是公差不为0的等差数列，若从中删去两项a_i和$a_j(i<j)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的4个数都能构成等差数列，则称数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}是$(i，j)$－可分数列．

（ⅰ）写出所有的$(i，j)$，$1\leqslant i<j\leqslant6$，使数列a_1，a_2，…，a_6是$(i，j)$－可分数列；

（ⅱ）当 $m \geqslant 3$ 时，证明：数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 $(2, 13)$ 一可分数列；

（ⅲ）从 1，2，…，$4m+2$ 中次任取两个数 i 和 $j(i<j)$，记数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 (i, j) 一可分数列的概率为 P_m 证明：$P_m > \frac{1}{8}$.

2024年全国高考数学试卷压轴题

新课标II卷

一、单项选择题

8．设函数$f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若$f(x)\geqslant 0$，则a^2+b^2的最小值为(　　)

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

二、多项选择题

11．设函数$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则(　　)

A．当$a>1$时，$f(x)$有三个零点

B．当$a<0$时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

C．存在a，b，使得$x=b$为曲线$y=f(x)$的对称轴

D．存在a，使得点$(1，f(1))$为曲线$y=f(x)$的对称中心

三、填空题

14．在如图的4×4方格表中选4个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有______种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的4个数之和的最大值是______．

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题

18．

某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成员为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分，该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和．某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为p，乙每次投中的概率为q，各次投中与否相互独立．

（1）若$p=0．4$，$q=0．5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率．

（2）假设$0<p<q$，

（ⅰ）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

（ⅱ）为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19．

已知双曲线 C：$x^2-y^2=m(m>0)$，点 $P_n(5,4)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$．按照如下方式依次构造点 $P_n(n=2,3,\cdots)$，过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 (x_n,y_n)．

（1）若 $k=\frac{1}{2}$，求 x_2，y_2；

（2）证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$．

2024 年全国高考数学试卷压轴题

甲卷（理科）

一、选择题

12．已知b是a，c的等差中项，直线$ax+by+c=0$与圆$x^2+y^2+4y-1=0$交于A，B两点，则$|AB|$的最小值为(　　)

A．2　　B．3　　C．4　　D．$2\sqrt{5}$

二、填空题

16．有6个相同的球，分别标有数字1、2、3、4、5、6，从中不放回地随机抽取3次，每次取1个球．记m为前两次取出的球上数字的平均值，n为取出的三个球上数字的平均值，则m与n差的绝对值不超过$\frac{1}{2}$的概率是______．

三、解答题

20．

设椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，点$M(1,\ \frac{3}{2})$在$C$上，且$MF\perp x$轴．

（1）求C的方程；

（2）过点$P(4,\ 0)$的直线与C交于A，B两点，N为线段FP的中点，直线NB交直线MF于点Q，证明：$AQ\perp y$轴．

21．

已知函数$f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$．

（1）当$a=-2$时，求$f(x)$的极值；

（2）当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$恒成立，求a的取值范围．

2024年全国高考数学试卷压轴题

甲卷（文科）

一、选择题

12．在△ABC中，内角A，B，C所对边分别为a，b，c，若$B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则$sinA+sinC=$(　　)

A．$\frac{2\sqrt{39}}{13}$　　B．$\frac{\sqrt{39}}{13}$　　C．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D．$\frac{3\sqrt{13}}{13}$

二、填空题

16．曲线$y=x^3-3x$与$y=-(x-1)^2+a$在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点，则a的取值范围为______.

三、解答题

20．

已知函数$f(x)=a(x-1)-lnx+1$.

（1）求$f(x)$的单调区间；

（2）当$a\leqslant 2$时，证明：当$x>1$时，$f(x)<e^{x-1}$恒成立.

21．

设椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，点$M(1,\frac{3}{2})$在$C$上，且$MF\perp x$轴.

（1）求C的方程；

（2）过点$P(4,0)$的直线与C交于A，B两点，N为线段FP的中点，直线NB交直线MF于点Q，证明：$AQ\perp y$轴.

2023年全国高考数学试卷压轴题

甲卷

一、选择题

12．已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1$、$F_2$为两个焦点，$O$为原点，$P$为椭有圆上一点，$cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则$|OP|=$

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{35}}{2}$

二、填空题

16．在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$\angle BAC=60°$，$BC=\sqrt{6}$，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，则$AD=$____.

三、解答题

20．设抛物线C：$y^2=2px(p>0)$，直线$x-2y+1=0$与C交于A，B两点，且$|AB|=4\sqrt{15}$．

（1）求p的值；

（2）设C的焦点为F，M，N为C上的两点，$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，求$\triangle MNF$面积的最小值.

21．已知$f(x)=ax-\frac{\sin x}{cos^3 x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$．

（1）当$a=8$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)<sin2x$，求a的取值范围.

2023年全国高考数学试卷压轴题

乙卷

一、选择题

12．已知⊙O的半径为1，直线PA与⊙O相切于点A，直线PB与⊙O交于B，C两点，D为BC的中点，若$|PO|=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$的最大值为

A．$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$　　C．$1+\sqrt{2}$　　D．$2+\sqrt{2}$

二、填空题

16．设$a\in(0,1)$，若函数$f(x)=a^x+(1+a)^x$在$(0,+\infty)$上单调递增，则a的取值范围是______.

三、解答题

20．已知椭圆C：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点$A(-2,0)$在$C$上.

（1）求C的方程；

（2）过点$(-2,3)$的直线交C于点P，Q两点，直线AP，AQ与y轴的交点分别为M，N，证明：线段MN的中点为定点.

21．已知函数$f(x)=(\dfrac{1}{x}+a)ln(1+x)$.

（1）当$a=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）是否存在a，b，使得曲线$y=f(\dfrac{1}{x})$关于直线$x=b$对称，若存在，求a，b的值，若不存在，说明理由.

（3）若$f(x)$在$(0,+\infty)$存在极值，求a的取值范围.

2023年全国高考数学试卷压轴题

新课标II卷

一、选择题（单选）

8．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$

A．120　　B．85　　C．-85　　D．-120

二、选择题（多选）

12．在信道内传输 0，1 信号，信号的传输相互独立．发送 0 时，收到 1 的概率为 $\alpha(0<\alpha<1)$，收到 0 的概率为 $1-\alpha$；发送 1 时，收到 0 的概率为 $\beta(0<\beta<1)$，收到 1 的概率为 $1-\beta$．考虑两种传输方案：单次传输和三次传输．单次传输是指每个信号只发送 1 次，三次传输 是指每个信号重复发送 3 次．收到的信号需要译码，译码规则如下：单次传输时，收到的信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码（例如，若依次收到 1，0，1，则译码为 1）．

A．采用单次传输方案，若依次发送 1，0，1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$

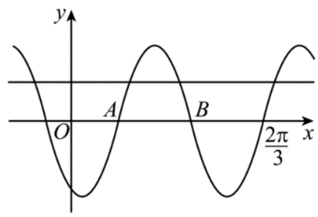
B．采用三次传输方案，若发送 1，则依次收到 1，0，1　概率为 $\beta(1-\beta)^2$

C．采用三次传输方案，若发送 1，则译码为 1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D．当 $0<\alpha<0.5$ 时，若发送 0，则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

三、填空题

16．已知函数 $f(x)=sin(\omega x+\varphi)$，如图 A，B 是直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点，若 $|AB|=\dfrac{\pi}{6}$，则 $f(\pi)=$______．



四、解答题

21．已知双曲线 C 的中心为坐标原点，左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$，离心率为 $\sqrt{5}$．

（1）求 C 的方程；

（2）记 C 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，过点 $(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M，N 两点，M 在第二象限，直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P．证明：点 P 在定直线上．

22．（1）证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<sinx<x$；

（2）已知函数 $f(x)=cosax-ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围．

2023年全国高考数学试卷压轴题

新课标I卷

一、选择题（单选）

8．已知 $sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$cos\alpha sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $cos(2\alpha+2\beta)=$

A．$\frac{7}{9}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．$-\frac{1}{9}$　　D．$-\frac{7}{9}$

二、选择题（多选）

12．下列物体中，能够被整体放入棱长为1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有

A．直径为0.99m的球体

B．所有棱长均为1.4m的四面体

C．底面直径为0.01m，高为1.8m的圆柱体

D．底面直径为1.2m，高为0.01m的圆柱体

三、填空题

16．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2．点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为______．

四、解答题

21．甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若末命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5．

（1）求第2次投篮的人是乙的概率；

（2）求第i次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1，2，\cdots，n$，则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}q_i$．记前 n 次（即从第1次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$．

22．在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0，\frac{1}{2})$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W．

（1）求 W 的方程；

（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

2022年全国高考数学试卷压轴题

甲卷

一、选择题

12．已知 $a=\frac{31}{32}$，$b=cos\frac{1}{4}$，$c=4sin\frac{1}{4}$，则

A．$c>b>a$　　B．$b>a>c$　　C．$a>b>c$　　D．$a>c>b$

二、填空题

16．已知$\triangle ABC$中，点D在边BC上，$\angle ADB=120°$，$AD=2$，$CD=2BD$．当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$______．

三、解答题

20．设抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点$D(p，0)$，过F的直线交C于M，N两点．当直线MD垂直于x轴时，$|MF|=3$．

（1）求C的方程；

（2）设直线MD，ND与C的另一个交点分别为A，B，记直线MN，AB的倾斜角分别为α，β．当$\alpha-\beta$取得最大值时，求直线AB的方程．

21．已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x}-lnx+x-a$．

（1）若$f(x)\geqslant 0$，求a　取值范围；

（2）证明：若$f(x)$有两个零点x_1，x_2，则$x_1x_2<1$．

2022年全国高考数学试卷压轴题

乙卷

一、选择题

12．已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为R，且$f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$．若$y=g(x)$的图像关于直线$x=2$对称，$g(2)=4$，则$\sum_{k=1}^{22} f(k)=$

A．-21　　B．-22　　C．-23　　D．-24

二、填空题

16．已知$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$且$a\neq1$）的极小值点和极大值点．若$x_1<x_2$，则a的取值范围是______．

三、解答题

20．已知椭圆E的中心为坐标原点，对称轴为x轴、y轴，且过$A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$两点．

（1）求E的方程；

（2）设过点$P(1,-2)$的直线交E于M，N两点，过M且平行于x轴的直线与线段AB交于点T，点H满足$\overline{MT}=\overline{TH}$．证明：直线$HN$过定点．

21．已知函数$f(x)=ln(1+x)+axe^{-x}$．

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若$f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个零点，求a的取值范围．

2022年全国高考数学试卷压轴题

新课标II卷

一、选择题（单选）

8．已知函数$f(x)$的定义域为R，且$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(x)=1$，则$\sum_{k=1}^{22} f(k)=$

A．-3　　B．-2　　C．0　　D．1

二、选择题（多选）

12．若x，y满足$x^2+y^2-xy=1$，则

A．$x+y\leqslant 1$　　B．$x+y\geqslant -2$　　C．$x^2+y^2\leqslant 2$　　D．$x^2+y^2\geqslant 1$

三、填空题

16．已知直线l与椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$在第一象限交于$A$，$B$两点，$l$与$x$轴，$y$轴分别交于$M$，$N$两点，且$|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则$l$　方程为______.

四、解答题

21．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$(a>0，b>0)$的右焦点为$F(2，0)$，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

（1）求C的方程；

（2）过F的直线与C的两条渐近线分别交于A，B两点，点$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$在C上，且$x_1>x_2>0$，$y_1>0$．过P且斜率为$-\sqrt{3}$的直线与过Q且斜率为$\sqrt{3}$的直线交于点M.
从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立：

①M在AB上；

②$PQ\parallel AB$；

③$|MA|=|MB|$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

22．已知函数$f(x)=xe^{ax}-e^x$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围；

（3）设$n\in N^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>ln(n+1)$.

2022年全国高考数学试卷压轴题

新课标I卷

一、选择题（单选）

8．已知正四棱锥的侧棱长为l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为36π，且$3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是

A．$[18,\ \frac{81}{4}]$　　B．$[\frac{27}{4},\ \frac{81}{4}]$　　C．$[\frac{27}{4},\ \frac{64}{3}]$　　D．$[18,\ 27]$

二、选择题（多选）

12．已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为R，记$g(x)=f'(x)$，若$f(\frac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$均为偶函数，则

A．$f(0)=0$　　B．$g(-\frac{1}{2})=0$　　C．$f(-1)=f(4)$　　D．$g(-1)=g(2)$

三、填空题

16．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，$C$的上顶点为$A$，两个焦点为$F_1$，$F_2$，离心率为$\frac{1}{2}$．过$F_1$且垂直于$AF_2$的直线与$C$交于$D$，$E$两点，$|DE|=6$，则$\triangle ADE$的周长是______.

四、解答题

21．已知点$A(2,\ 1)$在双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1\ (a>1)$上，直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，直线$AP$，$AQ$的斜率之和为0.

（1）求l的斜率；

（2）若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求$\triangle PAQ$的面积.

22．已知函数$f(x)=e^x-ax$和$g(x)=ax-\ln x$有相同的最小值.

（1）求a；

（2）证明：存在直线$y=b$，其与两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

2021 年全国高考数学试卷压轴题

甲卷

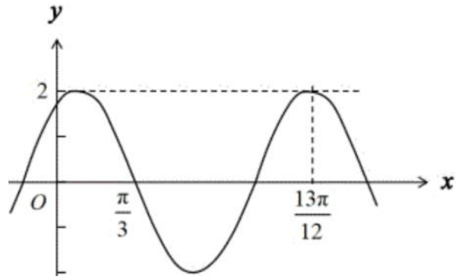
一、选择题

12．设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1，2]$时，$f(x)=ax^2+b$．若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f(\frac{9}{2})=$

A．$-\frac{9}{4}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{7}{4}$　　D．$\frac{5}{2}$

二、填空题

16．已知函数 $f(x)=2cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则满足条件 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$ 的最小正整数 x 为______．



三、解答题

20．抛物线 C 的顶点为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，直线 l：$x=1$ 交 C 于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$．已知点 $M(2，0)$，且⊙M 与 l 相切．

（1）求 C，⊙M 的方程；

（2）设 A_1，A_2，A_3，是 C 上的三个点，直线 A_1A_2，A_1A_3 均与⊙M 相切，判断 A_2A_3 与⊙M 的位置关系，并说明理由．

21．已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$．

（1）当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 的取值范围．

2021 年全国高考数学试卷压轴题

乙卷

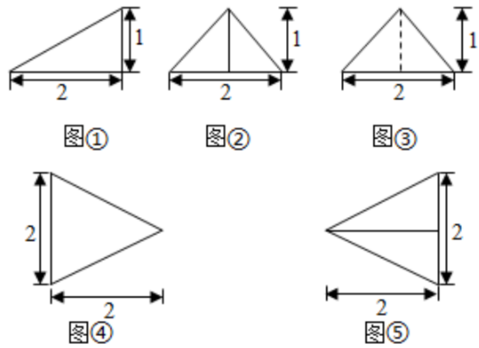
一、选择题

12．设 $a=2ln1.01$，$b=ln1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

二、填空题

16．以图①为正视图与俯视图，在图②③④⑤中分别选两个作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选为侧视图和俯视图的编号依次为______.



三、解答题

20．设函数 $f(x)=ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

（1）求 a；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$，证明：$g(x)<1$.

21．已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且 F 与圆 M：$x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

（1）求 p；

（2）若点 P 在 M 上，PA，PB 是 C 的两条切线，A，B 是切点，求△PAB 的最大值.

2021年全国高考数学试卷压轴题

新课标II卷

一、选择题（单选）

8．已知函数$f(x)$的定义域为R，$f(x+2)$为偶函数，$f(2x+1)$为奇函数，则

A．$f(-\frac{1}{2})=0$　　B．$f(-1)=0$　　C．$f(2)=0$　　D．$f(4)=0$

二、选择题（多选）

12．设正整数$n=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+a_k\cdot 2^K$，其中$a_i\in\{0,1\}$，记$\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，则

A．$\omega(2n)=\omega(n)$　　B．$\omega(2n+3)=\omega(n)+1$

C．$\omega(8n+5)=\omega(4n+3)$　　D．$\omega(2^n-1)=n$

三、填空题

16．已知函数$f(x)=|e^x-1|$，$x_1<0$，$x_2>0$，函数$f(x)$的图象在点$A(x_1,f(x_1))$和点$B(x_2,f(x_2))$的两条切线互相垂直，且分别交y轴于M，N两点，则$\frac{|AM|}{|BN|}$取值范围是_______.

四、解答题

21．一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来，设一个这种微生物为第0代，经过一次繁殖后为第1代，再经过一次繁殖后为第2代……，该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列，设X表示1个微生物个体繁殖下一代的个数，$P(X=i)=p_i(i=0,1,2,3)$．

（1）已知$p_0=0.4$，$p_1=0.3$，$p_2=0.2$，$p_3=0.1$，求$E(X)$；

（2）设p表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率，p是关于x的方程：$p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$的一个最小正实根，求证：当$E(X)\leqslant 1$时，$p=1$，当$E(X)>1$时，$p<1$；

（3）根据你的理解说明（2）问结论的实际含义.

22．已知函数$f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）从下面两个条件中选一个，证明：$f(x)$有一个零点.

①$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，$b>2a$；

②$0<a<\frac{1}{2}$，$b\leqslant 2a$.

2021 年全国高考数学试卷压轴题

新课标I卷

一、选择题（单选）

8．有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则

A．甲与丙相互独立　　B．甲与丁相互独立

C．乙与丙相互独立　　D．丙与丁相互独立

二、选择题（多选）

12．在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0，1]$，$\mu\in[0，1]$，则

A．当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B．当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

C．当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

D．当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

三、填空题

16．某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为 $20dm\times12dm$ 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 $10dm\times12dm$，$20dm\times6dm$ 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240dm^2$，对折 2 次共可以得到 $5dm\times12dm$，$10dm\times6dm$，$20dm\times3dm$ 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2=180dm^2$，以此类推，则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为______；如果对折 n 次，那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$______$dm^2$.

四、解答题

21．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17}，0)$、$F_2(\sqrt{17}，0)$，$|MF_1|-|MF_2|=2$，点 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程；

（2）设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T　两条直线分别交 C 于 A、B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

22．已知函数$f(x)=x(1-lnx)$．

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）设a，b为两个不相等的正数，且$blna-alnb=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$．

2020年全国高考数学试卷压轴题

新课标III卷

一、选择题

12．已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$．设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

二、填空题

16．关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

①$f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；

②$f(x)$ 的图像关于原点对称；

③$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称；

④$f(x)$ 的最小值为 2．

其中所有真命题的序号是______．

三、解答题

20．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，A，B 分别为 C 的左、右顶点．

（1）求 C 的方程；

（2）若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求△APQ 的面积．

21．设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\dfrac{1}{2}，f(\dfrac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直．

（1）求 b；

（2）若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1．

2020年全国高考数学试卷压轴题

新课标II卷

一、选择题

12．0－1周期序列在通信技术中有着重要应用。序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 满足 $a_1\in\{0,1\}(i=1,$ $2,\cdots)$，且存在正整数 m，使得 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 成立，则称其为0－1周期数列，并称满足 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 的最小正整数 m 为这个序列的周期．对于周期为 m 的0－1序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$C(k)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}\ (k=1,2,\cdots,m-1)$ 是描述其性质的重要指标。下列周期为5的0－1序列中，满足 $C(k)\leqslant\dfrac{1}{5}\ (k=1,2,3,4)$ 的序列是

A．11010　　*B*．11011　　*C*．10001　　*D*．11001

二、填空题

16．设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内

p_2：过空间中任意三点有且仅有一个平面

p_3：若空间两条直线不相交，则这两条直线平行

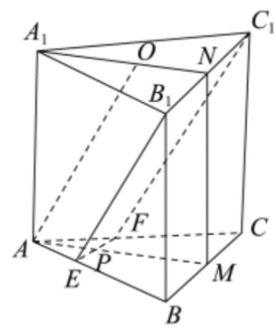
p_4：若直线 $l\subset$ 平面 α，直线 $m\perp$ 平面 α，则 $m\perp l$

则下列命题中所有真命题的序号是______．

①$p_1\wedge p_4$　　②$p_1\wedge p_2$　　③$\neg p_2\vee p_3$　　④$\neg p_3\vee\neg p_4$

三、解答题

20．如图已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点，过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E，交 AC 于 F．



（1）证明：$AA_1/\!/MN$，且平面 $A_1AMN\perp$ 面 EB_1C_1F；

（2）设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，若 $AO/\!/$ 面 EB_1C_1F，且 $AO=AB$，求直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值．

21．已知函数 $f(x)=sin^2xsin2x$．

（1）讨论 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调性；

（2）证明：$|f(x)|\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$；

（3）证明：$sin^2xsin^22xsin^24x\cdots sin^22^nx\leqslant\dfrac{3^n}{4^n}$．

2020 年全国高考数学试卷压轴题

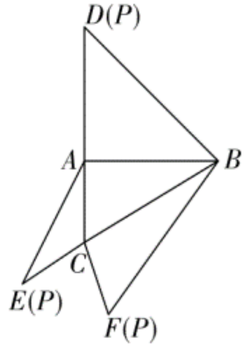
新课标I卷

一、选择题

12．若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则

A．$a>2b$　　B．$a<2b$　　C．$a>b^2$　　D．$a<b^2$

二、填空题



16．如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AC=1$，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE=30°$，则 $\cos\angle FCB=$______．

三、解答题

20．已知 A，B 分别为椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(a>1)$ 的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$．$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D．

（1）求 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点．

21．已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$．

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围．